Equazioni ellittiche in forma diveregenza

1. introduzione

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$, $f \in L^1(\Omega)$ ed

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_d(x) \end{pmatrix}$$

un campo vettoriale in $L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una soluzione debole del problema

$$-\mathrm{div}\big(A(x)\nabla u\big) = f + \mathrm{div}\, F \quad \text{in} \quad \Omega\,,$$

se

$$\int_\Omega \nabla u \cdot A(x)[\nabla v]^t\, dx = \int_\Omega f(x) v\, dx - \int_\Omega F(x)\cdot \nabla v\, dx \qquad \text{per ogni} \qquad v \in H^1_0(\Omega).$$

In seguito supporremo che la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

sia una matrice a coefficienti variabili con le seguenti proprietà:

- i coefficienti di A sono funzioni Hölder continue:
$$a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega) \quad \text{per ogni coppia di indici} \quad 1 \le i, j \le d.$$
- A è simmetrica:
$$a_{ij} \equiv a_{ji} : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \text{per} \qquad 1 \le i, j \le d,$$
- A è uniformemente ellittica e uniformemente limitata su Ω, ovvero esistono costanti $0 < c \le C$ tali che
$$c\,\mathrm{Id} \le A(x) \le C\,\mathrm{Id} \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega\,.$$

2. Operatori a coefficienti costanti

Proposizione 1. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali). Siano $\lambda_1(A), \dots, \lambda_d(A)$ gli autovalori della matrice A e siano $\ell \le L$ due costanti positive. Allora, sono equivalenti:

(i) $\ell \le \lambda_i(A) \le L$*, per ogni* $i = 1, \dots, d$ *;*

(ii) $\ell\,\mathrm{Id} \le A \le L\,\mathrm{Id}$*, dove ricordiamo che date due matrici simmetriche M ed N, diciamo che $M \le N$, se*

$$v^t M v \le v^t N v \qquad \textit{per ogni vettore} \quad v \in \mathbb{R}^d.$$

Proposizione 2. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali) tale che

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A \le L\,\mathrm{Id} \qquad \textit{dove} \qquad 0 < \ell \le L < +\infty\,.$$

Allora, per ogni $B_R \subset \mathbb{R}^d$ abbiamo

$$B_{\ell R} \subset A(B_R) \subset B_{LR}.$$

Proposizione 3. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & \dots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica (a coefficienti reali) tale che

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A \le L\,\mathrm{Id} \qquad \text{dove} \qquad 0 < \ell \le L < +\infty\,.$$

Sia U la matrice unitaria tale che

$$A = U^t\, D\big(\lambda_1, \dots, \lambda_d\big)\, U,$$

dove $D(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ è la matrice diagonale

$$D(\lambda_1, \dots, \lambda_d) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_d \end{pmatrix}$$

Allora, la matrice

$$B := U^t\, D\left(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_d^{-1/2}\right) U$$

è una matrice simmetrica tale che:

- $BAB = \mathrm{Id}$*;*
- $L^{-1/2}\,\mathrm{Id} \le B \le \ell^{-1/2}\,\mathrm{Id}\,.$

---

3. Cambiamento delle variabili

Proposizione 4. *Siano B una matrice simmetrica a coefficienti costanti e*

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica a coefficienti variabili.

(i) *Date due funzioni $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$ consideriamo le funzioni $\psi \in C_c^\infty(B(\Omega)$ e $v \in H^1(B(\Omega))$ definite da*

$$\varphi(x) = \psi(Bx) \qquad \text{e} \qquad u(x) = v(Bx).$$

Allora,

$$\int_\Omega \nabla\varphi(x) A(x) [\nabla u(x)]^t\,dx = \frac{1}{|\det B|} \int_{B(\Omega)} \nabla\psi(y) \Big(B\,A(B^{-1}y)\,B\Big) [\nabla v(y)]^t\,dy.$$

(ii) *Se le funzioni*

$$f \in L^2(\Omega) \qquad \text{e} \qquad g \in L^2(B(\Omega))$$

sono tali che

$$f(x) = g(Bx) \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Allora,

$$\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|\det(B)|} \int_{B(\Omega)} \psi(y)\,g(y)\,dy.$$

(iii) *Se i campi vettoriali*

$$F \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) \qquad \text{e} \qquad G \in L^2(B(\Omega);\mathbb{R}^d)$$

sono tali che

$$F(x) = B[G(Bx)] \quad \text{per ogni} \quad x \in \Omega.$$

Allora,

$$\int_\Omega \varphi(x) F(x)\,dx = \frac{1}{|\det(B)|} \int_{B(\Omega)} \psi(y) G(y)\,dy.$$

In particolare, se u è soluzione di

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f + \mathrm{div}\, F \quad in \quad \Omega,$$

allora v è soluzione di

$$-\mathrm{div}(\widetilde{A}\,\nabla v) = g + \mathrm{div}\, G \quad in \quad B(\Omega),$$

dove

$$\widetilde{A}(x) = BA(B^{-1}x)B \quad per\ ogni \quad x \in B(\Omega).$$

---

4. Sulla variazione della matrice A

Proposizione 5. *Sia*

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1d}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(x) & \dots & a_{dd}(x) \end{pmatrix}$$

una matrice simmetrica a coefficienti variabili tale che

$$\ell\,\mathrm{Id} \le A(x) \le L\,\mathrm{Id} \quad per\ ogni \quad x \in \Omega,$$

dove $0 < \ell \le L < +\infty$. Se le funzioni a_{ij} sono in $C^{0,\alpha}(\Omega)$, allora per ogni $x_0 \in \Omega$ ed ogni raggio $\rho > 0$ tale che $B_\rho(x_0) \Subset \Omega$ esiste una costante, esiste una costante $C_A > 0$ tale che

$$\big(1 - C_A|x-y|^\alpha\big)A_x \le A_y \le \big(1 + C_A|x-y|^\alpha\big)A_x \qquad per\ ogni \qquad x, y \in B_\rho(x_0).$$

In particolare, se $A_{x_0} = \mathrm{Id}$, allora

$$\big(1 - C_A|x-x_0|^\alpha\big)\,\mathrm{Id} \le A_x \le \big(1 + C_A|x-x_0|^\alpha\big)\,\mathrm{Id} \qquad per\ ogni \qquad x \in B_\rho(x_0).$$

e quindi

$$\big(1 - C_A r^\alpha\big)\int_{B_r(x_0)} |\nabla\varphi|^2\,dx \le \int_{B_r(x_0)} \nabla\varphi(x)\,A_x\,[\nabla\varphi(x)]^t\,dx \le \big(1 + C_A r^\alpha\big)\int_{B_r(x_0)} |\nabla\varphi|^2\,dx\,,$$

per ogni $r \le \rho$ e per ogni $\varphi \in H^1(B_r(x_0))$.